



TITLE:

# CR幾何学の諸問題 (複素幾何学の諸問題)

AUTHOR(S):

平地, 健吾

---

CITATION:

平地, 健吾. CR幾何学の諸問題 (複素幾何学の諸問題). 数理解析研究所講究録 2011, 1731: 96-105

ISSUE DATE:

2011-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170576>

RIGHT:

## CR 幾何学の諸問題

東京大学大学院数理科学研究科 平地健吾 (HIRACHI Kengo)

### 1 はじめに

CR 幾何学は多変数関数論（複素領域の境界）と微分幾何（接触構造に複素構造を付け加えてえられる  $G$ -構造）の二つの起源があり、その相互の関係を与えることにより面白い結果が得られる。このノートでは微分幾何の話題を中心に、そこから導かれる多変数関数論の問題も交えて、説明する。多くの問題は CR 幾何と共形幾何の類似性から自然に想定できるものである。これらの幾何は近年、放物型幾何として統一的に研究されている。手法は共通しているが、CR 幾何には正則、反正則の分解が存在するため、問題の難易度が異なることがある。解析の問題は基本的には難しくなるが、正則関数の性質を利用できる問題では比較的簡単になる場合もある。共形幾何での類似の問題を平行して考えることによる利点は多い。

このノートでは CR 幾何の諸問題としては極めて偏った視点しか与えていない。弱擬凸領域でのベルグマン核、 $\bar{\partial}$ -ノイマン問題などの解析的に重要な問題について言及していない。また CR 写像に関する Peter Ebenfelt 等による研究にもふれていない。これらの分野は歴史も長く、今でも様々な進展がある。

問題の難易度の基準として星をつけている。殆どが星 3 つの難問になっている；私が興味を持っている問題を並べた結果である。もちろん易しい問題もあるので興味がある場合は私に直接問い合わせて頂きたい。

### 2 CR 構造の二つの定義

まず実超曲面としての CR 多様体の定義を与える。  $M \subset \mathbb{C}^n$  ( $n \geq 2$ ) を実超曲面とする。  $M$  は次のような定義関数  $\rho \in C^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$  を持つとする：  $M = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) = 0\}$  かつ  $M$  上では  $d\rho \neq 0$ 。各点  $p \in M$  に対して  $T_p^{1,0}\mathbb{C}^n = \{\sum_{j=1}^n a_j \partial_{z_j}\}$  の部分空間

$$T_p^{1,0}M = \{Z \in T_p^{1,0}\mathbb{C}^n : Z\rho = 0 \text{ at } p\}$$

を考え、これらを集めて  $M$  上のベクトル束

$$T^{1,0}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{1,0}M \subset CTM$$

を作る。  $T^{1,0}M$  は常に複素ランク  $n-1$  をもつ。これを  $M$  の CR 束、  $(M, T^{1,0}M)$  を CR 多様体とよぶ。  $M$  上の実 1 形式を

$$\theta = i(\partial - \bar{\partial})\rho|_M$$

で定義すれば

$$L_\theta(Z, W) = d\theta(Z, \bar{W}), \quad Z, W \in T^{1,0}M$$

はエルミート形式になる. これを  $T^{1,0}M$  のレビ形式とよぶ.

この定義を抽象化してより一般的な CR 多様体の定義を与える.  $M$  を実  $2n-1$  次元の多様体,  $HM \subset TM$  を実余次元 1 の部分束,  $HM$  には複素構造  $J: HM \rightarrow HM$ ,  $J^2 = -Id$ , が与えられているとする. このとき  $(M, HM, J)$  を (抽象的な) CR 多様体をよぶ.  $(HM, J)$  は  $n-1$  次元の複素ベクトル束であり,  $J$  の固有値  $i, -i$  に対応する固有空間分解

$$CHM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

をもつ.  $T^{1,0}M$  が可積分, すなわち

$$Z, W \in \Gamma(T^{1,0}M) \text{ ならば } [Z, W] \in \Gamma(T^{1,0}M)$$

であるとき CR 多様体は可積分であるという. 実超曲面から定義される  $T^{1,0}M$  は常に可積分である. また  $n=2$  であれば  $T^{1,0}M$  は直線束になるので可積分性は自明になる. CR 多様体の微分幾何を考えるときには可積分性は強すぎる仮定であり, 次のような弱い可積分性の条件

$$Z, W \in \Gamma(T^{1,0}M) \text{ ならば } [Z, W] \in \Gamma(CHM)$$

に置き換えた方が自然である. このとき CR 多様体は部分可積分であるという.  $\theta$  を  $HM \subset TM$  を定義する 1 形式とすると部分可積分性があれば  $L_\theta(Z, Q) = d\theta(Z, \bar{W})$  は  $T^{1,0}M$  上のエルミート形式になり, レビ形式を定義する.

**定義** ある  $\theta$  に対してレビ形式  $L_\theta$  が正定値であるとき部分可積分 CR 多様体  $(M, HM, J)$  は強擬凸であるという.

$M$  が複素領域の境界であるときにはこの定義は領域の強擬凸性と一致する.

可積分性の仮定のもとでの二つの定義の同値性は自然な疑問である. これは CR 多様体の上で

$$Zf = 0, \quad Z \in T^{0,1}M$$

という偏微分方程式系の解を座標系を与えるぐらい沢山作れるか, という解析の問題である.  $n=2$  のときには局所的にも  $\mathbb{C}^2$  に埋め込めない CR 多様体の例が知られている.  $n \geq 3$  のとき  $M$  がコンパクトかつ可積分, 強擬凸であれば  $M$  が複素多様体の中の超曲面として実現できることが証明されている (Boutet de Monvel). コンパクト性の仮定は外すと解析はさらに困難になるが  $n \geq 4$  の場合は倉西, 赤堀により肯定的に解決されている. 残るのは

**問題 \*\*\*** 5 次元, 可積分, 強擬凸 CR 多様体は複素多様体の中の実超曲面として実現できるのか?

という問題である。誰もが認める難問である。もうすこし微分幾何的な問題としては

**問題** ★★ 部分可積分な CR 多様体はどのような空間に埋め込むのが自然か？

という設定がある。可積分でない複素多様体を考えればよさそうであるが、もう少し情報を持った空間を一意的に構成したい。これはあとで説明するアンビエント空間の理論と関係する。Biquard–Herzlich[BH] は 3 次元の CR 多様体を境界とする完備アインシュタイン多様体を構成しているが、そこには複素構造が現れないので不十分であると思う。

### 3 共形幾何との類似

強擬凸 CR 多様体には  $T^{1,0}M$  上のレビ形式の共形類が与えられている:  $HM$  を定義する  $\theta$  (以下では接触形式とよぶ) を  $\hat{\theta} = e^{2f}\theta$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , のようにスケールするときレビ形式は

$$L_{\hat{\theta}} = e^{2f} L_{\theta}$$

のように共形変形される。この事実から出発して、CR 幾何と共形幾何の類似を考えることができる。概念の対応を表にすると：

CR 多様体 $(M, HM, J)$	共形多様体 $(M, [g])$
接触形式 $\theta$ を選ぶ	リーマン計量 $g \in [g]$ を選ぶ
$L_{\theta}$ を保つ田中–Webster 接続 $\nabla$	$g$ を保つ Levi-Civita 接続 $\nabla$
曲率テンソル $R_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}}$ とトーシヨン $A_{ab}$	Riemann 曲率テンソル $R_{abcd}$ , トーシヨンは 0
Ricci 曲率 $Ric_{\bar{a}\bar{b}}$ とスカラー曲率 $S$	Ricci 曲率 $Ric_{ab}$ とスカラー曲率 $S$

のようになる。例えば共形多様体上の山辺問題「スカラー曲率が定数になるような  $g \in [g]$  を選べ」は CR 多様体上では「スカラー曲率が定数になるような接触形式  $\theta$  を選べ」という問題に翻訳できる。前者は解決されているが、後者は未解決である。Jerison–Lee により CR 平坦 (球面  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  と局所的に同値) でない場合 (コンパクト, 可積分, 強擬凸を仮定) には解の存在が示されている。残るのは CR 平坦の場合であるが、これは共形平坦の場合の類似であり、難しい。共形平坦の場合は positive mass 定理の研究が必要になるが CR 幾何ではこれは更なる難問である。最近 Paul Yang 等が 3 次元 CR 多様体の positive mass 定理で進展を得たようであるが、私はまだ勉強していない。さらに可積分性を部分可積分性に弱めて考えることもでき、どこまで Jerison–Lee の結果が一般化できるかも興味があるところである。Ponge [P] を見る限り、解析の観点からは可積分性は必要なさそうである。

もうすこし易しい問題としてアインシュタイン方程式

$$Ric = \lambda L_{\theta}$$

を考えることができる。共形幾何ではアインシュタイン方程式  $Ric = \lambda g$  の解を共形類の中でみつけることは一般的には不可能である（局所的な障害がある）。しかし埋め込み可能な CR 多様体では局所的には常にアインシュタイン方程式をみたす  $\theta$  をみつけることができる (Lee [L])。これを擬アインシュタイン接触形式とよぶことにする（アインシュタイン方程式は  $T^{1,0}M$  上でしか成り立たないので「擬」をつける）。 $M$  がスタイン多様体の境界になっている場合には擬アインシュタイン接触形式が存在することが知られている。一方、存在の必要条件としては  $T^{1,0}M$  の実数係数の第一チャーン類  $c_1(T^{1,0}M)$  の消滅が知られている。

**問題**  $\star\star$   $c_1(T^{1,0}M) = 0$  のとき擬アインシュタイン接触形式が存在するか？

トーションが消える場合には Lee により肯定的に解決されている。この問題は 5 章で説明する Q-曲率の研究にも関連している。

#### 4 不変微分作用素と局所不変量

CR 幾何と共形幾何の類似をもう少し考える。共形多様体  $(M, [g])$  上では共形不変作用素はリーマン計量  $g \in [g]$  から自然に定まる微分作用素  $P_g$  で任意のスケーリング  $\hat{g} = e^{2f}g$  に関して

$$P_{\hat{g}}\varphi = e^{wf}P_g(e^{w'f}\varphi) \quad \text{for any } \varphi \in C^\infty(M)$$

をみたすものとして定義される。ここで  $w, w' \in \mathbb{R}$  は  $f$  によらない定数である。「自然な」というのは曲率の共変微分と  $\varphi$  の共変微分のテンソル積の縮約でえられるという意味である。詳しくは [GoH] 参照。以下では  $\varphi$  に関して線形な作用素だけを考える。 $\varphi$  としてテンソルを考えることも重要であるが、説明を簡単するためにスカラー関数の場合に話を限定する。

0 階の共形不変作用素は計量  $g$  によって決まるスカラー関数  $I_g$  倍として表される。このとき  $w'' = w + w'$  とおけば

$$I_{\hat{g}} = e^{w''f}I_g$$

が成り立つ。これを重み  $w''$  のスカラー共形不変量と呼ぶことにする。 $w'' \in \{0, -1, -2, \dots\}$  であることがすぐにわかる。

共形不変作用素（とくにスカラー不変量）を全て構成するというのは共形幾何の基本的な問題である。 $M$  の次元  $n$  の偶奇に応じて状況は大きく異なる。Fefferman, Graham, Eastwood, 平地等の結果 [GrH]（準備中も含めて）をまとめると

アンビエント計量構成法を用いると

$n$  が奇数なら全てのスカラー不変量が構成できる；

$n = 4, 6, 8$  なら全てのスカラー不変量が構成できる；

$n$  が 10 以上の偶数なら重み  $w'' \geq -n/2$  のスカラー不変量が構成できる。

アンビエント計量についてはもうすぐ [FG] が出版されるのでそちらを参照して頂きたい. ここでは偶数次元の共形多様体は難しいということを覚えておいてほしい. その原因は球面  $S^n$  の共形自己同型群  $O(n+1, 1)$  が  $n$  が奇数なら  $B$  型,  $n$  が偶数なら  $D$  型になるという違いであると言える ([GoH] 参照). 偶数次元の共形多様体の難しさを示すもう一つの結果を述べる:

**定理** [GJMS, GoH]  $n \geq 4$  を偶数とするとき  $\Delta^m$  を主要部とする共形不変微分作用素が存在するは  $m = 1, 2, 3, \dots, n/2$  のときに限る.

作用素の存在を示したのが GJMS をイニシャルとする 4 人の共著の論文なので  $\Delta^m$  を主要部とする不変作用素は GJMS 作用素と呼ばれる. [GoH] は GJMS が作った場合以外には不変作用素が存在しないことを示している. これらは全てスカラー関数に作用する不変作用素の話であり, テンソル上の作用素では存在, 非存在ともに明確な答えは得られていない.

以上の理論の CR 幾何での類似を考える. アンビエント計量は CR 幾何で初めて Fefferman により構成されその後, 共形幾何に一般化されたものであるが, CR 幾何の方が多くの未解決問題が残されている. CR 不変作用素, CR 不変量は上と同様に接触形式のスケールリングに関する不変性を用いて定義される:  $P_\theta$  が  $\theta$  によって定義される接続, 曲率およびトーションを用いて記述される微分作用素であり,  $\hat{\theta} = e^{2f}\theta$  のとき

$$P_{\hat{\theta}}\varphi = e^{wf}P_\theta(e^{w'f}\varphi) \quad \text{for any } \varphi \in C^\infty(M)$$

が成り立つものとする. スカラー CR 不変量は 0 階の CR 不変微分作用素として定義できる.

**問題** \*\*\* 全てのスカラー CR 不変量を構成せよ.

これは Fefferman が 1979 年に提起した問題である. 重みが小さい場合には共形幾何と類似の結果が知られているが, 3 次元の場合でも完全な解は知られていない. CR 不変量と偶数次元の共形不変量は密接に関係している.  $2n-1$  次元 CR 多様体の上のある  $S^1$  束の上には  $2n$  次元のローレンツ共形構造が一意的に構成できることが知られている. これは Fefferman 空間とよばれ Fefferman 空間が共形平坦であることと下の CR 多様体が平坦であることは同値である. この対応により共形不変作用素から CR 多様体の不変作用素を誘導することができる. 4 次元多様体ではスカラー共形不変量が決定されているのでこれから 3 次元の CR 不変量が全て求まると想像できるが, そう簡単ではない. CR 多様体には複素構造と  $\theta$  方向があり, これらを用いて共形不変テンソルを分解することによりスカラー CR 不変量を構成することができる. その一般的な手法を開発する必要がある.

**問題** \* Fefferman 空間の共形不変テンソルの成分を用いて CR 多様体のスカラー不変量の例を作れ.

この方向を押し進めれば,

**問題 \*\*** 3次元 CR 多様体のスカラー不変量を全て構成せよ.

ぐらいなら解決できるかもしれない. 3次元が特別である理由はモデルである球面  $S^{2n-1}$  の等質空間としての表示を見るとわかる:

$$S^{2n-1} = SU(n, 1)/P_n$$

$SU(n, 1)$  が  $\mathbb{C}^n$  の一次分数変換として  $S^{2n-1}$  を保つように作用し,  $P_n$  はその作用のイソトロピー部分群である.  $P_n$  は一般には放物型部分群であるが,  $n = 2$  の場合に限りボレル部分群になる. これは  $S^3$  上の不変微分作用素の構造を著しく簡単にするものである. 例えば

**定理 [GG]** 3次元 CR 多様体では任意の  $m$  に対してサブラプラシアン  $\Delta_b^m$  のベキ  $\Delta_b^m$  を主要部とする CR 不変微分作用素が存在する.

という4次元の共形多様体とは異なる現象がおこる. これが3次元 CR が易しいのではないかと思う理由である.

次元が高くなると CR 不変作用素の構造はより複雑になると予想できる.  $\Delta_b^m$  を主要部とする CR 不変作用素が存在しない例はまだ知られていない. 一番簡単な例は

**問題 \*** 5次元 CR 多様体では  $\Delta_b^4$  を主要部とする CR 不変微分作用素が存在しないことを示せ.

である. [GG] により  $2n - 1$  次元 CR 多様体上では  $\Delta_b^m$ ,  $m \leq n$ , を主要部とする CR 不変作用素が与えられている (GJMS 作用素を Fefferman 空間をつかって引き戻せばよい). 上の問題は非存在の可能性がある最も簡単な場合である.

3次元の場合でも謎は残っている. 表現論とカルタン接続の理論を使えば CR 不変微分作用素を構成することができるのだが, アンビエント計量を用いる構成法には障害が現れ, 奇数次元共形多様体のように簡明な記述はえられていない. 少し工夫をすれば

**問題 \*\*** 3次元 CR 多様体において  $\Delta_b^m$  を主要部とする CR 不変微分作用素をアンビエント計量を用いて構成せよ.

は解けるのかもしれない. これがわかれば3次元のスカラー不変量の構成にも希望が持てる.

以上では主に可積分 CR 多様体の場合を考えている. Fefferman 空間は部分可積分 CR でも定義できるが, アンビエント空間の構成は困難である. 従って部分可積分 CR 多様体のスカラー不変量を構成するのも困難である.

**問題 \*\*\*** 部分可積分 CR 多様体に対応するアンビエント空間を構成せよ.

Fefferman 空間に付随する共形幾何におけるアンビエント空間は定義できるが、この空間には複素構造の情報がない。できれば複素構造をもったアンビエント空間がほしい、というのが趣旨である。

CR 不変量の定義は可積分性の有無に関わらず同様であるが、可積分 CR 多様体のスカラー不変量が部分可積分 CR 多様体のスカラー不変量に拡張できるとは限らない。

**問題 \*\*** 可積分 CR 多様体のスカラー不変量が部分可積分の場合に拡張できるかどうかを判定する方法を与えよ。

Fefferman 空間のスカラー共形不変量から定義されるスカラー CR 不変量は可積分性には依存しない。よって Fefferman 空間のテンソル値不変量と関係した問題であると思われる。予想としては

**問題 \*\*** 可積分 CR 多様体のスカラー不変量は部分可積分 CR 多様体のテンソル値不変量の一つの成分として実現できることを示せ。

ここでテンソルと言うのはより正確にはトラククターの成分 [CG] と言った方がよい。トラククターはカルタン接続の定義された主バンドルに付随するベクトル束の断面のことで共形幾何、CR 幾何の曲率をもちいた計算は欠かせない概念である。

Fefferman 空間にはもう一つ重要な未解決問題がある。Fefferman 空間はローレンツ共形構造をもつので長さ 0 の測地線が不変量として定義できる。この測地線を CR 多様体に射影したものを CR chain とよぶ。これは CR 多様体の Moser 標準形を構成するときにも現れる自然な曲線の族である。Fefferman は CR chain が一点に渦を巻きながら収束するという現象を発見したが、それ以降の発展がない。

**問題 \*\*** CR chain が渦を巻くような点の例を与えよ。

もちろん渦を巻く点の幾何的な記述が目標であるが、現時点ではあまりにも手掛かりが少なすぎる。Grauert tube および Reinhardt 領域の境界などの対称性をもつ CR 多様体での計算例は知られているが、これらでは渦巻きはおこらない。

## 5 Q-曲率とセゲー核

GJMS 作用素を用いると  $Q$ -曲率とよばれる接触形式の不変量が定義できる ([FH] 参照)。 $2n-1$  次元 CR 多様体上で  $\Delta_b^n$  を主要部とする CR 不変微分作用素  $P_\theta$  を考える（これだけでは  $P_\theta$  は一意的ではないが GJMS の構成法でえられるものを使う）。このとき  $\theta$  で局所的に決まるスカラー関数  $Q_\theta$  で

$$Q_{\hat{\theta}} = e^{-nf}(Q_\theta + P_\theta f), \quad \text{for any } f \in C^\infty(M)$$



を満たすものを  $Q$ -曲率とよぶ.  $Q_\theta$  は CR 不変量ではないが積分

$$\overline{Q_\theta} = \int_M Q_\theta \theta \wedge (d\theta)^{n-1}$$

は大域的な CR 不変量になる ( $P_\theta$  が自己共役であることから直ぐに分かる). これを全  $Q$ -曲率とよぶ.

$Q_\theta$  はアンビエント計量を用いて構成されるので, その具体的な表示を与えるのは困難である. 簡単な例を計算するだけでも意味がある.

**問題 \*** Grauert tube の境界での  $Q$ -曲率を計算せよ.

ここで Grauert tube は実解析的なコンパクトリーマン多様体  $(N, g)$  の接束  $TN$  の中の長さ  $r$  以下のベクトルからなる球束  $D_r$  である.  $TN$  には自然な複素構造 ( $N$  の複素化と思える) がはいり, 境界  $M_r = \partial D_r$  には CR 構造が誘導される.  $r$  が 0 に近づくときの  $Q_\theta$  の漸近展開は  $g$  の曲率を用いて記述される.  $M_r$  が 3 次元のときには小泉 [K] による計算結果がある. その高次元化は難しくないと思う.

最近, 可積分 CR 多様体上では全  $Q$ -曲率が消えることが示された. また CR 構造の変形に関する一次変分をとると部分可積分 CR 多様体上では全  $Q$ -曲率が消えないことがあることが分かる. しかし具体的な例は知られていない.

**問題 \*** 全  $Q$ -曲率が 0 でない部分可積分 CR 多様体の例を与えよ.

安易な予想としては次が考えられる.

**問題 \*** 全  $Q$ -曲率が消えるのは可積分 CR 多様体に限るのか?

また山辺問題の類似として

**問題 \*\*\***  $Q_\theta$  が定数となるような  $\theta$  は存在するか?

を考えることができる. これは  $\overline{Q_\theta} = 0$  の場合には  $P_\theta f = g$  という線形方程式の解の存在問題に帰着できるが, この問題は準楕円型でなく解析は難しい.  $\theta$  が擬アインシュタインであれば  $Q_\theta = 0$  であることが分かるので, この問題は上述の擬アインシュタイン接触形式の構成と関係している. とくに  $M$  がスタイン多様体の境界であればこの問題は肯定的に解決されている.

3 次元 CR 多様体上ではセゲー核の対数項の係数と  $Q$ -曲率が一致することが知られている [FH]. これは高次元では正しくないと思う.

**問題 \*\*\*** セゲー核の漸近展開の対数項の係数と  $Q_\theta$  とのずれを曲率を用いて記述せよ.

セゲー核の漸近展開の対数項の積分は全ての (可積分とは限らない) CR 多様体上で 0 になることが Boutet de Monvel によって示されている. これは全  $Q$ -曲率とは異なる性質であり, どこからこの違いが現れるのかを理解するにはこの問題が基本的である.

## 6 Ramadanov 予想

「 $\mathbb{C}^n$  の強擬凸領域のベルグマン核の境界での漸近展開の対数項が 0 になるのは境界が CR 平坦であるときに限る」というのが Ramadanov 予想である. これについては講究録 [H2] に書いたのだからここでは簡単に問題だけを復習する.

$n = 2$  のときには Ramadanov 予想は肯定的に解決されている. 高次元の場合には弱い反例が Englis–Zhang により与えられている: ある対称ケーラー多様体上の負の直線束の零断面の近傍として定義される強擬凸領域ではベルグマン核の対数項が消える. これは等質な直線束の場合には常に成り立つこともわかる [H2]. 弱い反例とよぶのは, この例では領域がスタインでないという意味で自然ではないからである. 自然な設定としては

**問題 \*\*\*** スタイン多様体の境界においてベルグマン核の漸近展開の対数項が消えれば境界は CR 平坦であることを示せ.

が考えられる. セゲー核の場合にも同様な問題を考えることができるが, これは更に難しくなる. セゲー核を定義するには CR 多様体上の体積要素を選ぶ必要がある. 擬アインシュタイン接続形式  $\theta$  が存在するときには  $\theta \wedge (d\theta)^{n-1}$  に関するセゲー核は CR 構造から決まる不変量になる. これを CR 不変セゲー核とよぶ. CR 平坦であれば CR 不変セゲー核は対数項をもたないことが知られている.

**問題 \*\*\*** セゲー核の対数項が消えるのは CR 多様体が平坦かつ体積要素が擬アインシュタイン接続形式で与えられるときに限るか?

3次元かつトーションが消える場合はこの問題は肯定的に解決されている [H1]. 一般の場合はかなり難しい問題である.

## 参考文献

- [BH] O. Biquard and M. Herzlich, A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds, Duke Math. J. 126 (2005), 53-100.
- [CG] A. Cap and R. Gover. CR-Tractors and the Fefferman Space, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008) 2519–2570.
- [L] J. Lee, Pseudo-Einstein structures on CR manifolds, Amer. J. Math. 110 (1988), 158–178.
- [P] R. Ponge, Heisenberg calculus and spectral theory of hypoelliptic operators on Heisenberg manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 194 (2008) no. 906.
- [FG] C. Fefferman and R. Graham, The Ambient metric, arXiv:0710.0919

- [GJMS] R. Graham, R. Jenne, L. Mason and G. Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence, *J. London Math. Soc.* 46 (1992), 557–565
- [GoH] R. Gover and K. Hirachi, Conformally invariant powers of the Laplacian – A complete non-existence theorem, *J. Amer. Math. Soc.* 17 (2004), 389–405.
- [GG] R. Gover and R. Graham, CR invariant powers of the sub-Laplacian, *J. Reine Angew. Math.* 583 (2005), 1–27.
- [K] E. Koizumi, The logarithmic term of the Szego kernel for two-dimensional Grauert tubes, *Osaka J. Math.* 42(2005), 339–351.
- [FH] Fefferman, C. and Hirachi, K., Ambient metric construction of  $Q$ -curvature in conformal and CR geometries, *Math. Res. Lett.* 10 (2003), 819–831.
- [GrH] R. Graham and K. Hirachi: Inhomogeneous Ambient Metrics, *The IMA vol. in math. and its app.* 144, 403–420, Springer 2007.
- [H1] K. Hirachi: Scalar pseudo-Hermitian invariants and the Szegő kernel on three-dimensional CR manifolds, in *Complex Geometry (Osaka 1990)*, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* 143, pp. 67–76, Dekker, New York, 1993.
- [H2] 平地健吾, セゲー核の対数項と Ramadanov 予想, 数理解析研究所講究録「ポテンシャル論とベルグマン核」

Date: Nov 30, 2010